Решения заданий отборочного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2025-26 гг

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

10 класс

10.1. Пусть a, b действительные числа, большие, чем 4. Покажите, что хотя бы один из трехчленов $x^2 + ax + b$ или $x^2 + bx + a$ имеет два различных действительных корня.

Доказательство. Дискриминанты уравнений из условия равны соответственно $a^2 - 4b$ и $b^2 - 4a$. Если оба этих уравнения имеют не больше, чем по одному действительному корню, то эти дискриминанты не положительны и одновременно выполнены неравенства $a^2 \leq 4b$ и $b^2 \leq 4a$. Обе части каждого неравенства неотрицательны, поэтому их можно перемножить и получить неравенство $a^2b^2 \leq 16ab$. Сокращаем это на положительное число ab, получим неравенство $ab \leq 16$, что противоречит неравенствам $a > 4, b > 4 \implies ab > 16$ из условия.

Критерии проверки. ■ Выписаны неравенства $a^2 \leq 4b$ и $b^2 \leq 4a$: 1 балл. ■ Получено неравенство $a^2b^2 \leq 16ab$: 2 балла. ■ Правильно получено неравенство $ab \leq 16$: 2 балла. ■ Замечено противоречие с $ab > 16$: 2 балла. ■ Отсутствуют комментарии о не отрицательности сторон неравенств и о делении на положительное число ab: снимаем 2 балла.

10.2. Действительные числа x, y, a таковы, что $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$. Найти все возможные значения a.

Ответ. $a = 0,1,2$.

Решение 1. Сразу заметим, что возможно $a = 0$ при $x = y = 0$, $a = 1$ при $x = 0, y = 1$ и $a = 2$ при $x = y = 1$, поэтому все указанные в ответе значения $a = 0,1,2$ достигаются.

Покажем, что других ответов нет, пусть далее $a \neq 0$. Тогда $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = a = x + y \neq 0$, сокращаем на $x + y \neq 0$, получаем $x^2 - xy + y^2 = 1$. Отсюда $xy = x^2 + y^2 - 1 = a - 1$, следовательно, числа x, y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - at + a - 1 = 0$, равными $a - 1$ и 1. Тогда $x^2 + y^2 = 1 + (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 2 = a$, откуда $a^2 - 3a + 2 = 0$ и a=1, a=2 что и требовалось доказать.

Решение 2. Рассмотрим равенство $(x+y)(x^3+y^3)=a^2=(x^2+y^2)^2$, из него получим равенство $xy(x^2+y^2)=2x^2y^2$. Из последнего следует, что, либо $x=0$, либо $y=0$, либо $x=y$. В первом случае $y=y^2=y^3$, откуда $y=0$ или $y=1$, во втором случае $x=x^2=x^3$, откуда $x=0$ или $x=1$, в третьем то же самое. В итоге получаются четыре возможных пары для (x,y): (0,0), (1,0), (0,1), (1,1). Для них получим соответственно $a=0,1,1,2$.

Критерии проверки. ■ На примерах найдены все правильные ответы: 1 балл. ■ Найдено соотношение $x^2-xy+y^2=1$: 2 балла. ■ Получено, что числа x,y являются корнями квадратного уравнения $t^2-at+a-1=0$, равными $a-1$ и 1: 2 балла. ■ Из соотношения $x^2+y^2=1+(a-1)^2=a^2-2a+2=a$ найдены $a=1, a=2$: 2 балла.
■ Для второго решения: получение равенства $xy(x^2+y^2)=2x^2y^2$: 3 балла. ■ Получение того, что либо $x=0$, либо $y=0$, либо $x=y$: 2 балла. ■ Нахождение отсюда четырёх возможных пар для (x,y): 1 балл. ■ Получение для них соответственно $a=0,1,1,2$: 1 балл.

10.3. На доске написаны десять различных натуральных чисел, сумма которых равна 62. Докажите, что произведение этих десяти чисел всегда делится на 60.

Доказательство. Число 60 разлагается в произведение трёх попарно взаимно простых чисел 3,4 и 5, поэтому делимость на 60 эквивалентна делимости на каждое из чисел 3, 4, 5. Предположим противное, что произведение некоторых 10 различных натуральных чисел, сумма которых равна 62, не делится на 60, тогда оно не должно делиться на одно из чисел 3, 4, 5.

1) Произведение не делится на 5, тогда среди этих 10 чисел нет чисел, делящихся на 5. В таком случае первое из них не меньше 1, второе – не меньше 2, третье - не меньше 3, четвёртое – не меньше 4, пятое – не меньше 6, и так далее, девятое – не меньше 11, десятое – не меньше 12, а их сумма не меньше, чем 1+2+3+4+6+7+8+9+11+12=63>62 – противоречие условию.

2) Произведение не делится на 3, тогда среди этих 10 чисел нет чисел, делящихся на 3. В таком случае первое из них не меньше 1, второе – не меньше 2, третье - не меньше 4, четвёртое – не меньше 5, пятое – не меньше 7, и так далее, девятое – не меньше 13, десятое – не меньше 14, а их сумма не меньше, чем 1+2+4+5+7+8+10+11+13+14=75>62 – противоречие условию.

3) Произведение не делится на 4, тогда среди этих 10 чисел точно нет чисел, делящихся на 4. Заметим, что это условие в данном пункте является необходимым, но не достаточным. В таком случае первое из них не меньше 1, второе – не меньше 2, третье - не меньше 3, четвёртое – не меньше 5, пятое – не меньше 6, и так далее, девятое – не меньше 11, десятое – не меньше 12, а их сумма не меньше, чем 1+2+3+5+6+7+9+10+11+13=67>62 – противоречие

условию. В этом случае мы даже не требуем, чтобы среди чисел не было двух чётных, что тоже давало бы делимость произведения на 4.

Критерии проверки. ■ Замечено, что делимость на 60 эквивалентна делимости на каждое из чисел 3, 4, 5, и, если число не делится на 60, тогда оно не должно делиться на одно из чисел 3, 4, 5: 1 балл. ■ Разбор каждого случая неделимости на 3, 4, 5: по 2 балла каждый.

10.4. На прямой, проходящей через вершину B остроугольного треугольника ABC параллельно стороне AC, отмечена точка P такая, что $\angle BPC = 2 \cdot \angle BAC$, и точки P и A лежат по разные стороны от прямой BC. Доказать, что сумма длин отрезков BP и PC равна длине стороны AC.

Доказательство. Проведём через точку P биссектрису угла BPC. Она образует угол, равный $\angle BAC$ с прямой BP, следовательно образует такой же накрест лежащий угол с параллельной прямой AC, поэтому параллельна стороне AB. Кроме того, она пересекает сторону BC, следовательно, пересекает прямую AC по внутренней точке M стороны AC. Четырёхугольник ABPM является параллелограммом, поэтому его противоположные стороны AM и BP равны. С другой стороны, в треугольнике CMP оба угла PMC и MPC равны углу равны $\angle BAC$, поэтому он является равнобедренным с равными сторонами MC и PC. Таким образом, AC=AM+MC=BP+PC, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. В данном решении ■ «Проведём через точку P биссектрису угла BPC»: 1 балл. ■ «она параллельна стороне AB»: 1 балл. «она пересекает прямую AC по внутренней точке M стороны AC»: 2 балла. ■ «стороны AM и BP равны»: 1 балл ■ «Треугольник CMP является равнобедренным с равными сторонами MC и PC»: 1 балл ■ отсюда вывод, что AC=AM+MC=BP+PC: 1 балл.
В любом решении должна чётко обосновываться картинка: что и в какой точке пересекают проводимые прямые, на каких отрезках лежат получаемые точки.

10.5. В шахматном турнире, который проводился в классе с 25 учащимися, каждая пара учеников сыграла максимум одну партию друг с другом. После окончания турнира оказалось, что, для любой сыгранной партии, по крайней мере один из её участников до начала этой партии сыграл не более 10 партий. Каково максимально возможное количество сыгранных партий на этом турнире?

Ответ. 209.

Решение. Докажем, что количество сыгранных на турнире партий не превосходит 209. Рассмотрим последнюю сыгранную на турнире партию, один из её участников сыграл к моменту её начала не больше 10 партий, значит

всего в турнире он сыграл не больше 11 партий. Теперь исключим его и все сыгранные с его участием партии из турнира и рассмотрим оставшихся 24 ученика и все сыгранные между ними партии. Количество сыгранных в любой момент партий у каждого оставшегося ученика не увеличится, по сравнению с исходным турниром. Следовательно, для этого нового турнира справедливо исходное условие - для любой сыгранной в нём партии, по крайней мере один из её участников к этому моменту сыграл не более 10 партий. Повторим для 24 учеников и нового турнира то же рассуждение - выберем последнюю сыгранную в нём партию, одного из её участников, сыгравшего в нём к моменту её начала не больше 10 партий, а всего в новом турнире не больше 11 партий, и исключим его и сыгранные им 11 партий, получим турнир уже для 23 участников, и так далее. Так сделаем 13 раз, пока не получим турнир для 12 участников. В нём с соблюдением условий могут быть сыграны все возможные $C_{12}^2 = 66$ партий. Таким образом, общее количество сыгранных на турнире партий не превосходит $66 + 13 \cdot 11 = 209$.

Пример, когда сыгранных на турнире партий ровно 209, легко строится «обратным ходом» по доказательству оценки. Первых 12 учеников заставляем сыграть все 66 партий между собой, потом 13 раз добавляем по одному ученику, заставляя его тут же сразу последовательно сыграть 11 партий с некоторыми 11 учениками (неважно, какими именно), участвовавших в турнире до его там появления. Получим в точности $66 + 13 \cdot 11 = 209$ сыгранных партий.

Критерии проверки. ■ Доказано, что количество сыгранных на фестивале партий не превосходит 209: 4 балла. ■ Построен пример турнира с 209 партиями: 3 балла. ■ Если процесс решения аналогичен описанному, но удаление участников проводится до 11 человек, с числом партий, равным $55 + 14 \cdot 11 = 209$ – верному ответу, то баллы на снимаются, это то же самое решение.