

**Решения заданий отборочного этапа Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике 2025-26 гг**

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

11 класс

11.1. Докажите, что величина выражения $A = \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$, если оно определено, не зависит от a , b и c . Найдите её.

Ответ. $A=-3$.

Решение. Приведём сумму дробей в правой части неравенства из условия к общему знаменателю, получим $\frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$. Аккуратно раскроем скобки в числителе, при этом кубы всех переменных сократятся, останется сумма $3(-a^2b + b^2a + a^2c - c^2a - b^2c + c^2b)$. Аккуратно раскроем скобки в знаменателе, при этом сократятся слагаемые abc и $-abc$, останется сумма $a^2b - b^2a - a^2c + c^2a + b^2c - c^2b$. Следовательно, отношение числителя и знаменателя равно $A=-3$.

Критерии проверки. ■ Если верное значение A найдено вычислениями на каком-нибудь примере (примерах): 1 балл.

11.2. На отрезке AB с центром O , как на диаметре, построена полуокружность. На ней взята произвольная точка P , отличная от A и B , и отмечена точка M , являющаяся серединой дуги AP полуокружности. При этом считаем, что дуга AP меньше дуги BP . Точка пересечения прямой BP с прямой, параллельной PM , и проходящей через O , обозначена через T . Докажите, что справедливо равенство $PO=PT$.

Доказательство. Дуга AP меньше 120 градусов, следовательно прямая MP пересекает прямую AB на продолжении BA за точку A , а прямая, параллельная PM и проходящая через O , пересекает прямую BP в точке T на отрезке BP (внутри полукруга с диаметром AB). Стороны OM и OP треугольника MOP

являются радиусами полуокружности, поэтому $\triangle MOP$ равнобедренный, обозначим величину угла $\triangle MOP$ при его вершине O за α . По условию, дуги AM и MP равны, поэтому $\triangle AOM$ равен $\triangle MOP$ и величина угла $\triangle AOM$ тоже равна α . Угол PBA является вписанным, соответствующим центральному углу $\triangle AOP$, поэтому его величина равна половине величины $\triangle AOP = 2\alpha$, то есть α . В равнобедренном $\triangle POB$ угол $\triangle OPB$ равен $\triangle PBO = \triangle PBA = \alpha$. Следовательно, накрест лежащие углы $\triangle POM$ и $\triangle OPB$ равны, поэтому прямые OM и $BP = BT$ параллельны, как и прямые MP и OT по условию, и четырёхугольник $MOTP$ является параллелограммом. Тогда его противоположные углы $\triangle OMP$ и $\triangle OTP$ равны. С другой стороны, углы $\triangle POT$ и $\triangle OPM$ равны, как накрест лежащие при пересечении OP параллельных прямых MP и OT , а углы $\triangle OPM$ и $\triangle OMP$ равны, как углы при основании равнобедренного $\triangle OMP$. Следовательно, равны углы $\triangle OTP = \triangle OMP = \triangle OPM = \triangle POT$ и $\triangle POT$ равнобедренный с равными сторонами PO и PT , что и требовалось доказать.

Критерии проверки. В данном решении ■ Доказательство того, что четырёхугольник $MOTP$ является параллелограммом: 3 балла. ■ Доказательство равенств углов $\triangle OTP = \triangle OMP = \triangle OPM = \triangle POT$: 4 балла.

11.3. Найти все пары простых чисел p и q , для которых число $pq - p - q + 11$ является точным квадратом некоторого натурального числа.

Ответ. $p = 7, q = 2$ и $p = 2, q = 7$.

Решение. Перепишем выражение в условии: $x^2 = pq - p - q + 11 = (p - 1)(q - 1) + 10$. Если оба простых числа p и q нечётны, то $x^2 = 4k + 10 = 4(k + 2) + 2$ имеет остаток 2 при делении на 4, однако квадраты натуральных чисел при делении на 4 могут давать только остатки 0 и 1, противоречие. Другой вариант рассуждения: $x^2 = 4k + 10 = 4(k + 2) + 2$ делится на 2, значит число x – чётно, тогда число $x^2 = 4k + 10 = 4(k + 2) + 2$ делится на 4, что невозможно, снова противоречие. Следовательно, одно или оба простых числа p и q должны быть чётны, то есть равняться 2. Если $p = q = 2$, то $pq - p - q + 11 = 11$ – не является точным квадратом. Если $q = 2$, то $pq - p - q + 11 = p + 9 = x^2$, тогда $p = (x - 3)(x + 3)$. Ввиду простоты числа p отсюда следует, что $x - 3 = 1, x = 4$, тогда $p = 7$, это даёт пару $p = 7, q = 2$, являющуюся решением задачи. Аналогично рассматривается случай, когда $p = 2$, это даёт вторую пару решений $p = 2, q = 7$.

Ответ. $p = 7, q = 2$ и $p = 2, q = 7$.

Критерии проверки. ■ Доказано, что одно или оба простых числа p и q должны быть чётны: 3 балла. ■ Разобран случай $p = q = 2$: 1 балл. ■ Разобраны

случаи, когда ровно одно из простых чисел равно 2: 3 балла. ■ Если в ответе упущена одна из симметричных пар: снимаем 1 балл.

11.4. Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, принимает действительные значения и отлична от константы. Докажите, что существуют различные действительные числа x, y такие, что $f(x + y) < f(xy)$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ не является константой, то существуют числа $a \neq b$ такие, что $f(a) < f(b)$. Попытаемся отыскать подходящие числа $x \neq y$ такие, что $x + y = a, xy = b$. Они должны быть корнями квадратного уравнения $t^2 - at + b = 0$ (*) с дискриминантом $D = a^2 - 4b$. Если $b \leq 0$, то при произвольном $a \neq b$ дискриминант положителен, и искомые $x \neq y$ являются двумя различными корнями рассматриваемого квадратного уравнения (*). Поэтому дальше можно считать, что для всех неположительных значений переменной x , значение $f(x)$ не больше, чем значения этой функции для всех действительных значений переменной. Следовательно, при всех неположительных значениях x функция $f(x)$ принимает одно и то же значение c , являющееся минимальным для неё на всей действительной прямой. Ввиду того, что $f(x)$ не является константой, найдётся такое $b > 0$, что $f(b) > c$. Теперь осталось выбрать достаточно большое по модулю отрицательное число a такое, что $D = a^2 - 4b > 0$. Дискриминант положителен, поэтому искомые в условии числа $x \neq y$ являются двумя различными корнями рассматриваемого квадратного уравнения (*). Доказательство завершено.

Критерии проверки. ■ Идея выбора чисел $a \neq b$ таких, что $f(a) < f(b)$: 1 балл. ■ Идея нахождения подходящих числа $x \neq y$ таких, что $x + y = a, xy = b$: 2 балла. ■ Рассмотрение случая $b \leq 0$: 1 балл. ■ Доказательство того, что при всех неположительных значениях x функция $f(x)$ принимает одно и то же значение c , являющееся минимальным: 2 балла. ■ Выбор достаточно большого по модулю отрицательного числа a : 1 балл.

11.5. В классе 24 ученика. Каждая группа, состоящая из трех учеников, встречается, выбирает одного из 21 оставшихся учеников, назовём его А, и делает ему подарок. При этом А считает каждого члена группы, которая сделала ему подарок, своим другом. Докажите, что есть ученик, у которого есть по крайней мере 10 друзей. Обращаем внимание, что в процессе дарений участвуют все возможные тройки учеников этого класса.

Доказательство. Предположим противное, что каждый ученик может назвать своим другом не больше, чем 9 других учеников этого класса. В таком случае его выбрали субъектом дарения не больше, чем $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ тройки

учеников класса. Каждая тройка учеников класса дарила подарок одному из одноклассников, поэтому учитывается в одной из 84 таких троек для некоторого ученика, поэтому всего троек учеников класса будет не больше $84 \cdot 24 = 2016$. Однако, это число равно $C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{6} = 2024 > 2016$ – противоречие.

Критерии проверки. Оценки каждого продвижения в данном решении. ■ «Предположим противное, что каждый ученик может назвать своим другом не больше, чем 9 других учеников этого класса»: 1 балл. ■ «В таком случае его выбрали субъектом дарения не больше, чем $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ тройки учеников класса»: 2 балла. ■ «Каждая тройка учеников класса дарила подарок одному из одноклассников, поэтому учитывается в одной из 84 таких троек для некоторого ученика, поэтому всего троек учеников класса будет не больше $84 \cdot 24 = 2016$ »: 2 балла. ■ «Однако это число равно $C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{6} = 2024 > 2016$ »: 2 балла.