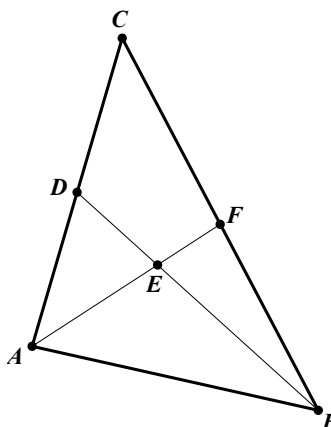


2 10 класс

1. (а) В треугольнике на приведённом чертеже площади $\triangle ADE$ и $\triangle BFE$ равны 4, а площадь $\triangle FDE$ равна 2. Найдите площадь $\triangle CDF$.



Ответ: 6.

Решение.

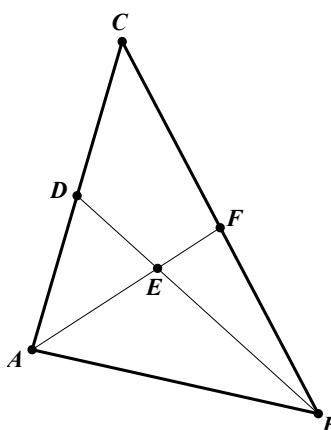
По свойству площадей

$$\frac{S_{DFE}}{S_{BFE}} = \frac{DE}{BE} \text{ и } \frac{S_{DFE}}{S_{ADE}} = \frac{EF}{AE} \implies \frac{DE}{BE} = \frac{EF}{AE} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда несложно получить, что BD и AF — медианы треугольника ABC . Медиана FD треугольника AFC делит его на два равновеликих треугольника, отсюда

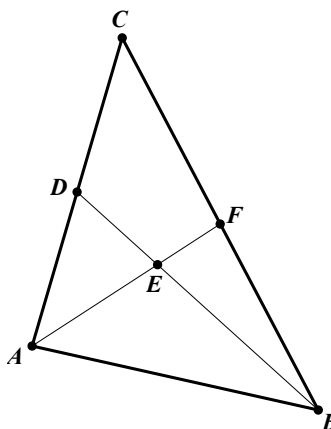
$$S_{CDF} = S_{AFD} = 6.$$

- (b) В треугольнике на приведённом чертеже площади $\triangle ADE$ и $\triangle BFE$ равны 2, а площадь $\triangle FDE$ равна 1. Найдите площадь $\triangle CDF$.



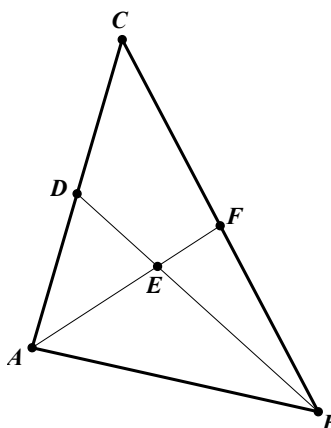
Ответ: 3.

- (с) В треугольнике на приведённом чертеже площади $\triangle ADE$ и $\triangle BFE$ равны 6, а площадь $\triangle FDE$ равна 3. Найдите площадь $\triangle CDF$.



Ответ: 9.

- (d) В треугольнике на приведённом чертеже площади $\triangle ADE$ и $\triangle BFE$ равны 8, а площадь $\triangle FDE$ равна 4. Найдите площадь $\triangle CDF$.



Ответ: 12.

2. (a) Петя распределяет сумму 63000 рублей по трём инвестиционным проектам: в первом и втором указана доходность 3% и 5% годовых, а в третьем 6% годовых соответственно. Известно, что только один из проектов принесёт указанную доходность, а два других лишь вернут изначально вложенную сумму. Известно также, что Петя распределил деньги таким образом, чтобы его гарантированный доход (тот, что он получит в наихудшем случае) был как можно большим. Какую сумму он при этом вложил в первый проект?

Ответ: 30000.

Решение. Пусть x_1 вложено в первый проект, x_2 во второй, а x_3 — в третий. Тогда Петя должен максимизировать $\min(3x_1, 5x_2, 6x_3)$. Максимум достигается, когда $3x_1 = 5x_2 = 6x_3$: если какие-то две из указанных величин не равны, то можно увеличить меньшую из них и уменьшить большую из них, не уменьшив общей прибыли. Например, если $3x_1 < 5x_2$, то доход не уменьшится, если увеличить x_1 и уменьшить x_2 вплоть до равенства $3x_1 = 5x_2$.

Итак, нужно разделить суммы в отношении $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 10 : 6 : 5$. Поэтому $x_1 = \frac{10}{21}S$.

- (b) Петя распределяет сумму 57000 рублей по трём инвестиционным проектам: в первом и втором указана доходность 4% и 6% годовых, а в третьем 9% годовых соответственно. Известно, что только один из проектов принесёт указанную доходность, а два других лишь вернут изначально вложенную сумму. Известно также, что Петя распределил деньги таким образом, чтобы его гарантированный доход (тот, что он получит в наихудшем случае) был как можно большим. Какую сумму он при этом вложил в первый проект?

Ответ: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{9} = 9 : 6 : 4$. Поэтому $x_1 = \frac{9}{19}S = 27000$.

- (с) Петя распределяет сумму 87000 рублей по трём инвестиционным проектам: в первом и втором указана доходность 3% и 12% годовых, а в третьем 15% годовых соответственно. Известно, что только один из проектов принесёт указанную доходность, а два других лишь вернут изначально вложенную сумму. Известно также, что Петя распределил деньги таким образом, чтобы его гарантированный доход (тот, что он получит в наихудшем случае) был как можно большим. Какую сумму он при этом вложил в первый проект?

Ответ: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15} = 20 : 5 : 4$. Поэтому $x_1 = \frac{20}{29}S = 60000$.

- (d) Петя распределяет сумму 75000 рублей по трём инвестиционным проектам: в первом и втором указана доходность 4% и 10% годовых, а в третьем 15% годовых соответственно. Известно, что только один из проектов принесёт указанную доходность, а два других лишь вернут изначально вложенную сумму. Известно также, что Петя распределил деньги таким образом, чтобы его гарантированный доход (тот, что он получит в наихудшем случае) был как можно большим. Какую сумму он при этом вложил в первый проект?

Ответ: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 15 : 6 : 4$. Поэтому $x_1 = \frac{15}{25}S = 45000$.

3. (a) AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину стороны AC этого треугольника, если $\angle ABY = \alpha$, площадь треугольника ABC равна S , а площади треугольников ABZ и ACX равны.

Ответ: $b = \sqrt{\frac{2S}{\sin(2\alpha)}}$.

Решение. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. По теореме о биссектрисе $BZ : ZC = c : b$, откуда $S_{ABZ} = \frac{c}{b+c}S_{ABC}$. Аналогично и $S_{ACZ} = \frac{b}{a+b}S_{ABC}$. Тогда $c(a+b) = b(b+c)$, откуда $ac = b^2$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ac \sin 2\angle ABY = b^2 \sin \angle ABY \cos \angle ABY$, откуда $b = \sqrt{\frac{S}{\sin \alpha \cos \alpha}}$.

- (b) AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину стороны AC этого треугольника, если $\sin \angle ABY = \frac{1}{4}$, площадь треугольника ABC равна $36\sqrt{15}$, а площади треугольников ABZ и ACX равны.

Ответ: 24.

- (с) AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину стороны AC этого треугольника, если $\sin \angle ABY = \frac{1}{5}$, площадь треугольника ABC равна $32\sqrt{6}$, а площади треугольников ABZ и ACX равны.

Ответ: 20.

- (d) AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину стороны AC этого треугольника, если $\sin \angle ABY = \frac{1}{6}$, площадь треугольника ABC равна $25\sqrt{35}$, а площади треугольников ABZ и ACX равны.

Ответ: 30.

- (e) AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину

стороны AC этого треугольника, если $\sin \angle ABY = \frac{1}{7}$, площадь треугольника ABC равна $64\sqrt{3}$, а площади треугольников ABZ и ACX равны.

Ответ: 28.

4. (а) Найдите минимальное значение параметра a , при котором множество решений уравнения $(2a - 7)x - y - 6a + 21 = 0$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений системы

$$\begin{cases} ax - y - 3a + 4 \leq 0, \\ ax + 2y - 8 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Решение. Исходная система неравенств при каждом фиксированном значении параметра a задает пересечение двух полуплоскостей, границами которых являются прямые l_1 и l_2 , заданные уравнениями $ax - y - 3a + 4 = 0$ и $ax + 2y - 8 = 0$ соответственно. Пусть l_3 — прямая, заданная условием $(2a - 7)x - y - 6a + 21 = 0$.

Заметим, что если прямые l_1, l_2 и l_3 не проходят через одну точку, то такие значения параметра нам не подходят: в этом случае пересечение соответствующих полуплоскостей будет пустым множеством или будет состоять из бесконечного числа точек. Таким образом, необходимым условием для искомого значения параметра является существование общей точки для прямых l_1, l_2 и l_3 .

Найдем точку пересечения прямых l_1 и l_2 . Для этого найдем решение системы

$$\begin{cases} ax - y - 3a + 4 = 0, \\ ax + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим, что либо $a = 0$, либо $x = 2, y = 4 - a$. Рассмотрим оба случая.

Простой проверкой убеждаемся, что $a = 0$ не подходит. Таким образом, $A(2; 4 - a)$ — точка пересечения прямых l_1 и l_2 . Теперь запишем условие прохождения прямой l_3 через точку A : получим, что $a = 3$. Остается проверить, что найденное значение параметра подходит. Подставим $a = 3$ в исходную систему:

$$\begin{cases} y \geq 3x - 5, \\ y \geq -1,5x + 4. \end{cases}$$

Легко видеть, что у этой системы неравенств с прямой $y = -x + 3$ только одно решение $x = 2, y = 1$.

- (b) Найдите минимальное значение параметра a , при котором множество решений уравнения $3ax + y - 9a - 4 = 0$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений системы

$$\begin{cases} ax - y - 3a \geq 0, \\ (2a - 1)x - 2y + 8 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: -1.

- (с) Найдите минимальное значение параметра a , при котором множество решений уравнения $(2a + 1)x - 2y - 6a - 3 = 0$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений системы

$$\begin{cases} 2ax + y - 6a - 4 \geq 0, \\ ax - y + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: -1,5.

- (d) Найдите максимальное значение параметра a , при котором множество решений уравнения $3ax + 2y - 8 = 0$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений системы

$$\begin{cases} (a+2)x - y - 3a - 2 \leq 0, \\ ax + y - 3a \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: 1.

5. (a) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, а их произведение делится на 9.

Ответ: 2100000.

Решение. Возможны три случая.

- i. a делится на 9 (таких a — 100), b — любое (таких b — 9000). Таких пар чисел $N_1 = 900\,000$.
- ii. a делится на 3, но не делится на 9 (таких a — 200), b делится на 3, но не делится на 9 (таких b — 2000). Таких пар чисел $N_2 = 400\,000$.
- iii. a — любое (таких a — 900), b делится на 9 (таких b — 1000). Таких пар чисел $N_3 = 900\,000$.

При этом пары чисел, где a делится на 9 (таких a — 100), b делится на 9 (таких b — 1000), посчитаны дважды. Их количество равно $N_4 = 100\,000$.

Общее количество пар: $N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = 2\,100\,000$.

- (b) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — пятизначное, а их произведение делится на 9.

Ответ: 21000000.

- (c) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — четырехзначное, b — пятизначное, а их произведение делится на 9.

Ответ: 210000000.

- (d) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — шестизначное, а их произведение делится на 9.

Ответ: 210000000.

6. (a) Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABH , касается прямой AC . Найдите косинус угла BCA , если $AH = 1$, $AB = 3\sqrt{11}$.

Ответ: 0,1

Решение. Пусть M — основание высоты к стороне AC , $\frac{AH}{AB} = k$, $\angle ACB = \varphi$. По свойству хорды и касательной

$$\angle CAH = \angle ABH = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \varphi.$$

С другой стороны

$$\angle CBM = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \varphi.$$

Поэтому углы ABM и CBM равны, значит BM — биссектриса и высота треугольника ABC , и этот треугольник является равнобедренным. По теореме синусов для треугольника ABH

$$\frac{AB}{\sin \angle AHB} = \frac{AH}{\sin \angle ABH} \iff \frac{AB}{\sin (180^\circ - \varphi)} = \frac{AH}{\sin (90^\circ - \varphi)} \implies \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{AH} = \frac{1}{k}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0,1.$$

- (b) Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABH , касается прямой AC . Найдите косинус угла BCA , если $AH = 1$, $AB = 2\sqrt{6}$.

Ответ: 0,2

- (c) Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABH , касается прямой AC . Найдите косинус угла BCA , если $AH = 3$, $AB = \sqrt{91}$.

Ответ: 0,3

- (d) Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABH , касается прямой AC . Найдите косинус угла BCA , если $AH = 2$, $AB = \sqrt{21}$.

Ответ: 0,4

7. (a) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + x + 5y = 10^{2101}$.

Ответ: 840.

Решение. Заметим, что число x должно делиться на 4. Также заметим, что если $x \leq 2100 \cdot 4$, то $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + x < 10^{2101}$, а если $x \geq 2101 \cdot 4$, то $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + x > 10^{2101}$. Поэтому если для натурального $x \leq 2100 \cdot 4$ выражение $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + x$ делится на 5, то найдется такое натуральное y , что требуемое равенство будет верным.

Выражение $\sqrt[4]{10^x}$ делится на 10, а выражение $x^2 + x$ делится на 5 только в том случае, когда x имеет остаток 0 или 4 при делении на 5. Таким образом, нам подходят такие натуральные $x \leq 2100 \cdot 4$, которые делятся на 4 и имеют остаток 0 или 4 при делении на 5. То есть это числа вида $20t$ и $20t + 4$. Таких чисел от 1 до $2100 \cdot 4$ будет ровно 840, и для каждого из них найдется ровно одно натуральное y .

- (b) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + 2x + 5y = 10^{3102}$.

Ответ: 1240.

- (c) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство $\sqrt[4]{10^x} + x^2 - 3x + 5y = 10^{2302}$.

Ответ: 920.

- (d) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство $\sqrt[4]{10^x} + x^2 + 3x + 5y = 10^{3301}$.

Ответ: 1320.

8. (a) На занятии по физкультуре учитель расставил n школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число $C_n^2 - 2$? Известно, что все школьники в классе разного роста.

Ответ: $\frac{n - 2 + C_{n-1}^2}{n!}$.

Решение. Староста может вычислить требуемое число следующим образом: пусть каждый школьник посчитает количество школьников справа от него, ниже его по росту. После этого старосте достаточно сложить все числа, которые посчитали все школьники. Заметим, что общее число пар равно C_n^2 , и это число отличается от данного на 2, поэтому лишь в двух парах порядок школьников по росту противоположный. Значит, либо два школьника назвали число, отличающееся от максимально возможного для их позиции, на единицу (среди этих школьников не могло быть последнего в шеренге), либо ровно один школьник назвал число, меньшее максимально возможного на 2 (это не могло получиться для последнего и предпоследнего школьников). В итоге получаем $C_{n-1}^2 + (n - 2)$ вариантов. Вероятность равна $\frac{n - 2 + C_{n-1}^2}{n!}$.

- (b) На занятии по физкультуре учитель расставил 9 школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число 34? Известно, что все школьники в классе разного роста. Ответ округлите до шести знаков после запятой.

Ответ: 0,000096.

- (c) На занятии по физкультуре учитель расставил 8 школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число 26? Известно, что все школьники в классе разного роста. Ответ округлите до шести знаков после запятой.

Ответ: 0,000670.

- (d) На занятии по физкультуре учитель расставил 7 школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число 19? Известно, что все школьники в классе разного роста. Ответ округлите до шести знаков после запятой.

Ответ: 0,003968.

- (e) На занятии по физкультуре учитель расставил 6 школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число 13? Известно, что все школьники в классе разного роста. Ответ округлите до шести знаков после запятой.

Ответ: 0,019444.

9. (a) Имеется палитра из нескольких различных оттенков цветов. Известно, что все оттенки из неё кроме сиреневого сочетаются с разным количеством других оттенков палитры (включая сиреневый), а сиреневый сочетается ровно с 13-ю. Какое наименьшее количество оттенков может быть в такой палитре?

Ответ: 26.

Решение. Если среди всех остальных оттенков (без сиреневого) есть оттенок A , который сочетается со всеми другими, то каждый сочетается по крайней мере с одним оттенком, следовательно, в группе остальных количества сочетающихся оттенков распределены так: $1, 2, 3, \dots, n - 1$, где n — общее количество оттенков в палитре. Удалив из группы остальных оттенков два: оттенок A и тот, который сочетается только с A (т. е. имеющего ровно 1 «дружественный» оттенок), получим аналогичную ситуацию, только вместо $n - 1$ будет $n - 3$. Так, попарно удаляя оттенки, мы придем к ситуации, когда из группы остальных либо удалены все, либо остался один, который сочетается с сиреневым. При каждом удалении число оттенков, сочетающихся с сиреневым, уменьшается на 1. Значит, были удалены либо 26 оттенков, и тогда их общее количество равно 27, либо удалены 24 оттенка, и при этом один остался: в этом случае получаем число 26. Если среди остальных (кроме сиреневого) нет оттенка, который сочетается со всеми, то между ними количества возможных сочетаний распределены так: $0, 1, 2, \dots, n - 2$. В этом случае, если удалить тот оттенок, который ни с чем не сочетается, то получится предыдущая ситуация — оттенок, сочетающийся с $n - 2$ другими, сочетается со всеми оставшимися кроме него. Поэтому в этом случае число оттенков равно 27 или 28.

- (b) Имеется палитра из нескольких различных оттенков цветов. Известно, что все оттенки из неё кроме лимонного сочетаются с разным количеством других оттенков палитры (включая лимонный), а лимонный сочетается ровно с 12-ю. Какое наименьшее количество оттенков может быть в такой палитре?

Ответ: 24.

- (c) Имеется палитра из нескольких различных оттенков цветов. Известно, что все оттенки из неё кроме бордового сочетаются с разным количеством других оттенков палитры (включая бордовый), а бордовый сочетается ровно с 15-ю. Какое наименьшее количество оттенков может быть в такой палитре?

Ответ: 30.

- (d) Имеется палитра из нескольких различных оттенков цветов. Известно, что все оттенки из неё кроме бирюзового сочетаются с разным количеством других оттенков палитры (включая бирюзовый), а бирюзовый сочетается ровно с 14-ю. Какое наименьшее количество оттенков может быть в такой палитре?

Ответ: 28.

10. (a) Рассматриваются многочлены вида $P(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + 128$ с неотрицательными коэффициентами $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, имеющие по семь действительных корней (не обязательно различных). Какое наименьшее значение может иметь $P(8)$?

Ответ: 10000000.

Решение. Поскольку многочлен имеет 7 действительных корней, его можно записать в виде $P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_7)$, где $x_1, \dots, x_7$ — корни многочлена. Тогда

$$P(0) = (-1)^7 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_7 = 128 \iff x_1 \cdot \dots \cdot x_7 = -128.$$

Из условия, что все коэффициенты многочлена неотрицательны, получаем, что при $x \geq 0$ $P(x) > 0$. Следовательно, все корни многочлена отрицательны.

Сделаем для удобства замену $y_1 = -x_1, \dots, y_7 = -x_7$, получим $P(8) = (8 + y_1) \cdot \dots \cdot (8 + y_7)$. Нужно минимизировать данное выражение при $y_1, \dots, y_7 > 0$, $y_1 \cdot \dots \cdot y_7 = 128$.

Рассмотрим выражения

$$\begin{cases} A = (8 + y_1)(8 + y_2) = 64 + 8(y_1 + y_2) + y_1y_2, \\ B = (8 + \sqrt{y_1y_2})^2 = 64 + 16\sqrt{y_1y_2} + y_1y_2. \end{cases}$$

Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического

$$\sqrt{y_1 y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2},$$

получим $A \geq B$, причём данные выражения равны при $y_1 = y_2$. Аналогичное заключение можно сделать для остальных пар переменных. Таким образом, $P(8)$ принимает минимальное значение при

$$y_1 = y_2 = \dots = y_7 = \sqrt[7]{128}.$$

Получаем ответ: наименьшее значение $P(8) = (8 + \sqrt[7]{128})^7 = 10^7$.

- (b) Рассматриваются многочлены вида $P(x) = x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + 128$ с неотрицательными коэффициентами $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, имеющие по семь действительных корней (не обязательно различных). Какое наименьшее значение может иметь $P(16)$?

Ответ: 612220032.

- (c) Рассматриваются многочлены вида $P(x) = x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + 3^7$ с неотрицательными коэффициентами $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, имеющие по семь действительных корней (не обязательно различных). Какое наименьшее значение может иметь $P(6)$?

Ответ: 4782969.

- (d) Рассматриваются многочлены вида $P(x) = x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + 3^7$ с неотрицательными коэффициентами $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, имеющие по семь действительных корней (не обязательно различных). Какое наименьшее значение может иметь $P(12)$?

Ответ: 170859375.